Задача 1 Разтягащ се кондезатор

Плосък кондензатор, началното разстояние между пластините, всяка от които има площ *S,* е *d*. Всяка пластина е с маса *m* и може да се движи без триене по неподвижен, дълъг, проводящ прът. През центъра на всяка от тях минава по един прът. Пръчките минават през центъра на плъстините. Те се срещат по средата между двете пластините като са изолирани една от друга чрез тънко гумено тяло с пренебрежимо малка дебелина.

Пръчките са много тънки и влиянието им върху електричните им и магнитените полета (вън и в кондензатора) могат да се пренебрегнат. През цялото време всяка пластина е в идеален електричен контакт с пръчката, минаваща през него. Отначало всяка от пръчките е в покой като може да се зарежда с положителен заряд *Q*. Кондензаторът е във вакуум (ε_0 е електричната константа, а *c* скоростта на светлината във вакуум, са известни). Източник на постоянно напрежение *U* се свързва с краищата на пръчките и пластините на кондензатора се освобождават. (могат да започнат да се движат)

a. изразете големината на *Q* чрез *S*, *d*, ε_0 и *U* , в момента, в който пръчките са прекратили движението си. Дали това е устойчиво и неустойчиво равновесие? Моля обяснете.

Предположете, че в момента $t = 0$, когато зарядът е бил *Q*, пресметнат от по-горното изискване, пластините съвсем леко са ударени, така че те излизат от равновесие и започват да се отдалечават една от друга. Изразете разстоянието между тях като функция на времето ($x(t)$=?).

b. Получете диференциалното уравнение, описващо $x(t)$.

c. Преобразувайте уравнението, така че то да описва зависимостта $v(x)$ (скоростта, с която се разделечават пръчките като функция на разстоянието между тях). Представете решение на уравнението като използвате константите *m*, *S*, *d*, ε_0, *U*, а също така и разстоянието *x*.

d. определете по какъв начин се променя интензитета на електричното поле *E* на кондензатора с течение на времето.

Разгледайте множеството от точки в кондензатора (между пластините), които се намират на разстояние *r* от осите, минаващи през центровете на пластините, където *r* е много по-малко от *d*.

e. изразете големината на магнитното поле *B* в тези точки чрез *m*, *S*, *d*, ε_0, *c*, *U*, *x*, и *r*. Как са ориентирани магнитните индукционни линии?

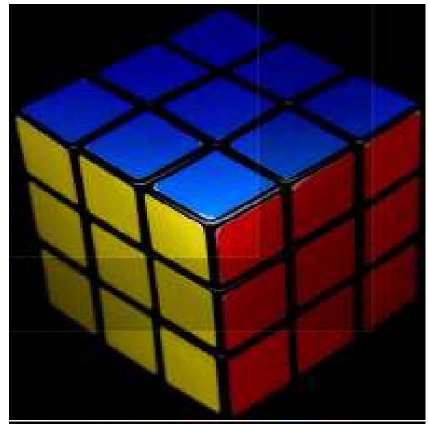
Малък тънък диалектричен пръстен, с лице *A*, инерчен момент *I*, зареден с положителен заряд *q* се поставя между пластините на кондензатора на разстояние *r* от оста, минаваща през центровете на пластините. Пръстенът лежи в равнина, принадлежаща на тази ос. През цялото време пренебрегваме индуктивността на обектите, включени в този проблем.

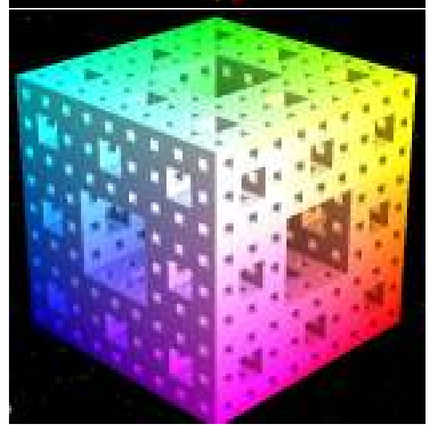
В началния момент $t = 0$ пръстенът може да се върти свободно около собствена ос.

f. Определете максималната ъглова скорост на пръстена и разстоянието между плочите при тази скорост.

g. В момента, когато пръстенът се върти с максимална ъглова скорост се отстранява захранването. Определете ъгловата скорост на пръстена веднага след това.

Задача 2 Фрактална физика



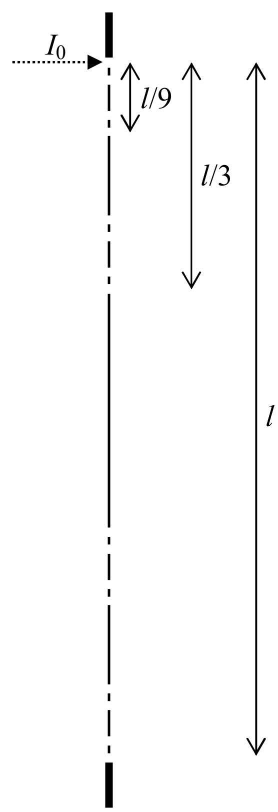


1. Всички сме виждали кубът на Рубик, състоящ се от 27 малки кубчета.

Сега махнете вътрешното кубче и шестте кубчета, лежащи в центъра на всяка от стените. Сега вие разполагате с 20 кубчета и можете да гледате през куба.
Сега ще приложим тази процедура за всяко от двадесетте кубчета и ще я повторим до безкрайност. Накрая ще получите обект, който се нарича фрактален, наречен „Menger sponge” (или “Sierpinski cube”).

Изчислете инерчния момент на такъв обект, с маса m и дължина на страната l, и ос, минаваща през центъра на две срещуположни страни.

2. Разгледайте дифракционна решетка, която прилича на фигурата “Cantor set” (показана на чертежа). Такава решетка се получава чрез отстраняване на средната от всеки три части, с дължина l. След това блокираме централната част на двата останали отвора и т.н. Крайният резултат е подобен на този, който се вижда на чертежа.
Нека N е максималния брой стъпки, за които е възможно физически да се приложи тази процедура и I_0 е интензитета на моногхроматична светлина, която пада нормално върху решетката. Разгледайте случая на дифракция на светлината от тази решетка, когато ъгълът е α, като приемете, че всеки елемент от решетката може да се разглежда като точков източник на светлина.



a. Каква е разликата в оптичните пътища от двата най-горни отвора на тази дифракционна решетка чрез l, N и α. Изчислете интензитета на дифрактиралата светлина на тези два отвора, като функция на α, игнорирайки всички останали отвори.
b. Нека означим $2\pi l\sin\alpha/3^N\lambda$ с x. Начертайте графиката $I(x)$.
c. По същия начин представете $I(\alpha)$ за четирите най-горни отвора и начертайте графиката $I(x)$.
[*Помощ*: Използвайте, че уравнението $\tan(x) + 3\tan(3x) = 0$ има решение $x = n\pi/6$, $n \in \mathbb{N}$.]
d. изразете $I(\alpha)$ за цялата дифракционна решетка чрез I_0, l, N, и α, и представете общата дифракционна картина.

Задача 3 Въведение в квантовата механика

В квантовата механика се предполага, че кинетичната енергия на една частица е дискретна, много по-малка част от останалата енергия, което може да бъде изразена чрез формулата:

$$E = E_0 + \frac{m_0 v^2}{2} = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} = f(p) \ .$$

1. Уравнението на незатихваща (с постоянна амплитуда) плоска вълна, която се разпространява по направлението на оста x е:

$$\xi(x,t) = a\sin(\omega t - kx) \ ,$$

Където аргументът на синусовата функция ще наричаме фаза на вълната, където $k = 2\pi/\lambda$.
Фазовата скорост c се дефинира като скоростта, с която се мени фазата на вълната в пространството, т.е. по друг начин казано скоростта на разпространение на вълната.

a. Изразете фазовата скорост чрез ω и k.

Сега приемаме, че две незатихваща плоски вълни се разпространяват по оста x с приблизително еднакви ω и k:

$$\xi_1(x,t) = a_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \ , \ \xi_2(x,t) = a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \ ; \ \omega_1 \approx \omega_2 \ , \ k_1 \approx k_2 \ .$$

b. Разглеждаме интерференцията на две такива вълни в определен момент t. Определете координатите на точките от оста x, в които вълните имат максимални амплитуди и параметрите на резултантната вълна в този фиксиран момент.

Дефинирайте груповата скорост v_g, с която тези точки се движат по оста x.

c. Определете груповата скорост на вълните чрез $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ и $\Delta k = k_2 - k_1$.

Сега вместо две вълни имаме множество от вълни, имащи кръгови честоти ω, запълващи много малък интервал $\Delta\omega$ около ω_0 и параметри k *(виж по-горе)* в също такъв малък интервал Δk около k_0. В този случай излиза, че ω се мени линейна функция на k, $\Delta\omega/\Delta k$ представлява наклон на графиката на тази функция, спрямо оста x. Също така излиза, че има постоянна плътност на амплитудата $a/\Delta k$.

d. Напишете израз за резултантната вълна чрез a, ω_0, $\Delta\omega$, k_0, Δk, x, и t. За фиксиран момент t, дайте приблизителна оценка на отношението на двете най-големи стойности на амплитудите. Също така изразете v_g.

[*Помощ*: Уравнението tan α = α освен очевидното решение α = 0, има и приблизителни решения α = ± (2n+1) π/2, n = 1, 2,…]

2. Някой може би знае, че енергията и момента на импулса на фотона могат да бъдат изразени чрез честотата и/или дължината на вълната на съответстващото електромагнитно лъчение:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega \ ; \ p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{h}{2\pi} = \hbar k \ ; \ \hbar \approx 10^{-34}\,\mathrm{Js}.$$

Louis DeBroglie изказва хипотезата, че частиците могат да се разглеждат като вълни, описвани с тази функция:

$$\xi(x,t) = a\sin\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right).$$

Нещо повече, нека предположим, че всяка частица с фиксирани енергии и импулси $E/\hbar$ и $p/\hbar$.е еквивалентна на множество от вълни.

e. Докажете, че в този случай груповата скорост v_g е скоростта на частицата.

Чрез този резултат ни довежда до идеята, че централния максимум на множеството вълни би могъл да бъде интерпретиран като фиксирам x координатата на частицата в момента t.

f. Изчислете разстоянието Δx между централния максимум и най-близкия минумим и покажете, че е в сила $\Delta x \Delta p = h$.

Това означава, че ако искаш по-точно и по-точно да определиш местоположението на централния максимум на множеството вълни, то ти трябва да вземаш по-широк и по-широк интервал на момента на импулса. Ако вместо множество от вълни разгледаме една вълна, то ще загубим следата на частицата върху оста x.
На пръв поглед разстоянието, изчислено по-горе може да се интерпретира като показателно относно относителния размер на частицата. Но тъй като на теория ширината на множеството от вълни е произволна, то също така има друг с по-малка стойност максимум. Още по-интересно е да видим резултантната вълна като мярка за вероятността за намиране на частицата по оста x за интервал t.

3. Разглеждайки функцията на две променливи ξ(x,t) може да се дефинира комплексната функция на същите променливи чрез комплексната (имагинерната) част на първата функция:

$$\Psi(x,t) = a[\cos(\omega t - kx) + i\sin(\omega t - kx)] \ .$$

Оттук следва:

$$\Psi(x,t) = a\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} \ .$$

Можем да опишем чрез тази функция вълната.

g. Напишете също така два израза на уравнението на незатихваща едномерна вълна, разпространяваща се в противоположна посока на оста x. Намерете израз на синусова и косинусова функция в експененциална форма.
h. Напишете по същия начин уравнението на стояща вълна получена чрез интерференция на две такива вълни с еднакви амплитуди, разпространяващи се по оста x в противоположни посоки.

Плътност на вероятност ще наричаме вероятността да се намери частица в точка x и момент t като $|\Psi(x, t)|^2$. Това означава, че:

$$\int \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)dx = 1 \quad \text{for any}\, t,$$

Където звездата (*) означава комплексно спрегнато.
Ние искаме да изучаваме квантовото състоянние на свободно движещи се частици (например електрон с енергия в покой E_0 = 0.5 MeV) в някакъв фиксиран отрязък l. Следователно неговата потензциална енергия се мени от 0 за всяко $x \in [-\,l/2\ ,\ +\,l/2]$ и безкрайност за друго x. Представяме си, че тази област е заградена с безкрайно високи стени, между които гравитацията е нула, в които ударите на електрона със стените са идеално еластични.
i. Каква е минималната възможна стойност на кинетичната енергия на такава частица в класическата механика? Каква е плътността на вероятността в този случай?

Чрез квантовия подход, приложен за тази ситуация частицата може да се разглежда като две различни стоящи вълни (подобно на осцилатор) Ψ описва възела $x = \pm\, l/2$, наречен вълнова функция, всяко състояние на този осцилатор съответства на едно квантово състояние на частицата.

j. Определете стойностите E_{n} на кинетичната енергия на частицата, съответстваща на n-тото състояние на осцилатора (n се нарича квантово число). Оценете E_1 за електрон, ако l = 1 Å (ангстрьом е 10exp(-10) m)
k. Напишете вълновата функция Ψ_1 , съответстваща при основно състояние и вълновата функция Ψ_2 , съответстваща на първо следващо състояние, и изразете амплитудите c_1 и c_2 чрез l. Оценете вероятностите за намиране на частица в центъра на средната третина, във всяко от двете състояния.
Нека също както струната на музикален инструмент не се настройва само за едно трептене (осцилация), а по-скоро е обект на разместване на позицията на възлите на стоящи вълни, и реалното състояние на частицата има максимуми, описвани чрез всички вълнови функции чрез коефициенти α_{n} представящи теглата на всяко „чисто" състояние:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Psi_n(x,t)\ .$$

l. Разглеждаме $\alpha_n = 0$ за всяко n > 2, и намираме връзката между α_1 и α_2.

В действителност горният резултат се запазва за всяко n, и това показва, че Ψ_n не влияе на другите. По-скоро те се разглеждат като независими единични вектори в безкрайномерното пространство, $\Psi(x,t)$, където базовия вектор е с координати $\{\alpha_n \mid n = 1, 2,\ldots\}$.

Накрая нека се върнем към предположението, че има само чисти (цели) състояния и разглеждаме случая на частица, движеща се свободно вътре в кутия с размерио $l_x \times l_y \times l_z$. Отново потенциалната енергия е нула вътре в кутията и е безкрайност навън, а ударите със станите са еластични, но този път вълновата функция зависи от четири координати: x, y, z, и t. Това означава, че този път се нуждаем от три квантови числа, по едно за всяка ос: n_x, n_y и n_z.

m. Намерете минималната кинетична енергия на такава частица, използвайки методите на класическата механика. Каква е плътността на вероятността в този случай?
n. Напишете израз за кинетичната енергия чрез E_0, c, l_x, l_y, l_z, n_x, n_y, n_z и $\hbar$.

Може да се установи, че частицата има една и съща енергия при различни стойности на квантовите числа. Този факт се нарича израденост (“degeneracy”).
Опростените условия, при които се появява изроденост са, че поне две от страните на кутията трябва да са равни.

o. За $l_x = l_y = l_z = 1$Å, изчислете кинетичната енергия, съответстваща на основното състояние на електрона. Изродено ли е това състояние?
p. Дайте примери за изроденост в случаи, при които стените на кутията не са равни.
q. Напишете уравнение за $\Psi_{nx,ny,nz}(x,y,z,t)$ и намерете стойността на $c_{nx,ny,nz}$, представено чрезl_x, l_y и l_z.