1. КОНДЕНСАТОР “РАСТЯЖИМЫЙ”

В начальный момент времени пластинки плоско-параллельного конденсатора площади S, расположены на расстоянии d друг от друга. Каждая пластинка имеет массу m и может двигаться без трения вдоль фиксированного прямого, длинного и тонкого, хорошо проводящего электрический ток, прута, который проходит через маленькое отверстие в центре диска. Пруты соприкасаются в центре конденсатора, но изолированы друг от друга куском резины толщиной которого можно пренебречь. Они очень тонкие и их воздействием на электрическое и магнитное поля внутри (снаружи) конденсатора можно пренебречь. Каждая пластина соответственно с прутом в любое время имеет хороший электрический контакт. Первоначально пластины в неподвижном состоянии и каждая заряжена электрическим положительным зарядом Q. Конденсатор расположен в вакууме; известна электрическая проницаемость вакуума ε_0 и скорость света в вакууме c. На пруты подается постоянное напряжение U и оставляют свободными.

a. Выразите величину электрического заряда Q в зависимости от S, d, ε_0 и U, так, чтобы пластинки оставались неподвижными. Будет ли равновесие устойчивым? Объясните.

Для оставшейся части задачи предположим, что электрический заряд Q имеет значение, которое было определено выше. В момент времени $t = 0$, пластинкам был дан маленький импульс, который вывел их из состояния равновесия , так что они начинают удаляться друг от друга. Обозначьте через $x(t)$ расстояние между пластинками в некоторый момент времени t.

b. Напишите дифференциальное уравнение, описывающее $x(t)$.

c. Преобразуйте уравнение так, чтобы оно описывало зависимость $v(x)$ (скорость с которой меняется *расстояние между пластинками*). Решите уравнение в зависимости от m, S, d, ε_0, U и x.

d. Определите скорость с которой меняется во времени величина интенсивности электрического поля E внутри конденсатора.

Рассмотрим точки расположенные внутри конденсатора на расстоянии r от оси, которая проходит через центры пластин, где r намного меньше радиуса пластин.

e. Выразите величину индукции магнитного поля B в этих точках через m, S, d, ε_0, c, U, x и r. Как ориентированы линии магнитного поля?

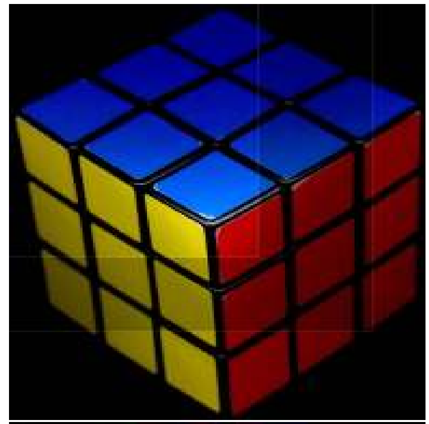
Внутри конденсатора, на расстоянии r от оси, которая проходит через центры пластин, расположено диэлектрическое, тонкое маленькое кольцо с площадью A и момента инерции I, заряженное положительным электрическим зарядом q. Плоскость кольца включает ось которая проходит через центр пластин. Пренебречь в любой момент времени индукцией всех обьектов задачи.

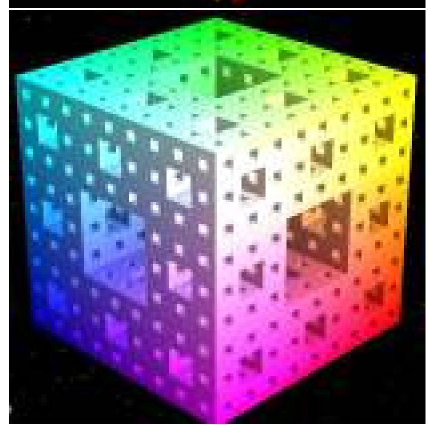
В момент времени $t = 0$ кольцо оставляют свободным, и дают возможность вращаться без трения только вокруг собственной оси.

f. Какой будет максимальная угловая скорость кольца и какое расстояние будет между пластинами в тот момент времени?

g. Электрическое напряжение прерывают в тот момент времени когда кольцо достигает максимальную угловую скорость. Какая будет угловая скорость кольца в момент времени сразу после этого?

2. ФРАКТАЛЬНАЯ ФИЗИКА



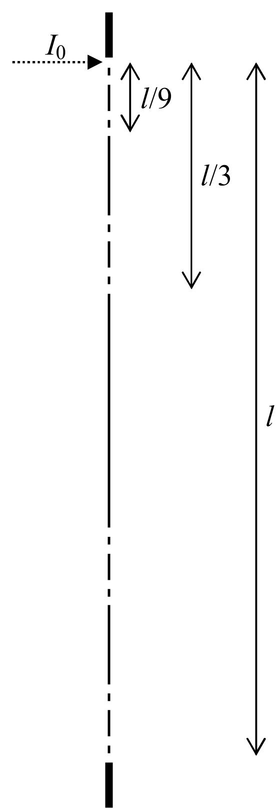


1. Вероятно Вы знакомы с кубиком Rubik. Это игрушка в виде кубика, имеющая грани разных цветов, состоящие из 9 маленьких кубиков, как показано в первом рисунке. Имеются всего 27 маленьких кубиков (центральный внутренний кубик невозможно разглядеть снаружи без разбора куба).

Уберем центральный внутренний кубик и шесть кубиков, лежащие в центре каждой грани. Остаются 20 кубиков, и можно смотреть вдоль осей, проходящие через центр граней первоначального куба.
Применяем эту процедуру к каждому из тех 20 оставшихся кубиков и повторяем до бесконечности. В конце получается фрактальный предмет, который изображен во втором рисунке и назван “губка Menger” (или “куб Sierpinski”).

Вычислите момент инерции полученного тела, имеющего массу m и длину ребра l, относительно оси, проходящей через центры двух противоположных граней.

2. Рассмотрим одномерную диффракционную решетку, имеющую форму так называемой “множества Cantor”. Чтобы получить такую решетку начинают с наполнения одной трети щели центрального отверствия ширины l. Затем наполняете треть оставшихся двух центральных отверстий и т.д.Конечный результат показан на рисунке.



Пусть N максимальное количество шагов, при которых физически возможно выполнять эту процедуру и I_0 интенсивность монохроматического света падающего нормально на каждое отверстие решетки. Рассмотрим дифрагирующий свет под углом α; для упрощения считаем отверстия точками.

a. Напишите соответствующую разность путей для первых двух щелей от верхней части решетки как функцию от l, N и α. Вычислите интенсивность дифрагирующего света тех двух отверстий как функцию от α, пренебрегая остальными щелями.

b. Обозначим $2\pi l\sin\alpha/3^N\lambda$ через x. Постройте график $I(x)$.

c. Аналогично вычислите $I(\alpha)$ для первых четырех отверстий верхней части решетки и повторно постройте график $I(x)$.

[*Указание*: Для упрощения предположим, что нетривиальное решение уравнения $\mathrm{tg}(x) + 3\ \mathrm{tg}(3x) = 0$ будут $x = n\pi/6$, $n \in \mathbb{N}$.]

d. Выразите $I(\alpha)$ для полной диффракционной решетки как функцию от I_0, l, N и α и изобразите общую дифракционную картинку.

3. ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ МЕХАНИКУ

В дальнейшем рассмотрим кинетическую энергию частиц намного меньшую , чем ее энергия покоя, так, чтобы можно было написать в Ньютоновской форме:

$$E = E_0 + \frac{m_0 v^2}{2} = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} = f(p) \ .$$

1. Уравнением неамортизированной плоской волны, которая распространяется вдоль положительной оси Ox является

$$\xi(x,t) = a \sin(\omega t - kx) \ ,$$

где аргумент функции синус называется “фазой” волны, а k называется “волновым числом” и равно $2\pi/\lambda$.
Скорость фазы c определяется как скорость некоторого значения фазы волны распространения в пространстве, строго говоря , это скорость распространения волны.

a. Выразите скорость фазы как функцию от ω и k.

Рассмотрим две плоские неамортизированные волны , которые распространяются вдоль положительной оси Ox, с почти равными ω и k:

$$\xi_1(x,t) = a_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \ , \ \xi_2(x,t) = a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \ ; \ \omega_1 \approx \omega_2 \ , \ k_1 \approx k_2 \ .$$

b. Учитывая интерференцию этих волн в момент времени t, определите точки расположенные на оси Ox соответствующую максимальной амплитуде результирующей волны в тот момент времени.

Определим групповую скорость v_g как скорость с которой передвигаются эти точки вдоль оси Ox.

c. Выразите групповую скорость как функцию от $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ и $\Delta k = k_2 - k_1$.

Теперь вместо двух волн , рассмотрим, “пакет” волн, имеющие ω частоту в маленьком промежутке $\Delta\omega$ вблизи ω_0, и k в маленьком промежутке Δk вблизи k_0. В этом случае можно найти, что ω меняется линейно относительно k, $\Delta\omega/\Delta k$ означает градиент (наклон). Можно предположить, что плотность амплитуды почти постоянная, $a/\Delta k$.

d. Напишите выражение для результирующей волны как функцию от a, ω_0, $\Delta\omega$, k_0, Δk, x şi t. Для момента времени t, оцените отношение наибольших двух амплитуд. А также, покажите, что найденное выражение для v_g остается в дальнейшем правильным.

[*Указание*: Уравнение tg α = α имеет, кроме очевидного решения α = 0, приблизительное решение α = ± (2*n*+1) π/2, *n* = 1, 2,…]

2. Известно, что энергия импульса фотона может быть выражена через частоту и/или длина волны электромагнитного излучения соответственно:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega \; ; \; p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{h}{2\pi} = \hbar k \; ; \; \hbar \approx 10^{-34}\,\text{Js}.$$

Louis DeBroglie выдвинул гипотезу обобщающую вышеуказанные формулы для всех микрочастиц. Следовательно, для любой частицы, которая движется вдоль оси O*x* можно представит уравнение плоской неамортизированной волны:

$$\xi(x,t) = a\sin\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right).$$

Более того, предположим, что каждая частица эквивалентна пакету волн с центром $E/\hbar$ и $p/\hbar$.

e. Покажите, что в этом случае v_g представляет скорость частицы.

Вышеуказанный результат приводит к идее, что основной максимум пакета можно рассматривать как положение частиц вдоль оси O*x* в любой момент времени *t*.

f. Вычислите расстояние Δx от центра пакета и ближайший минимум и покажите, что $\Delta x \Delta p = h$.

Это означает, что если хочешь получить хорошую точность для положения центра пакета, тогда должны допустить больший предел для значения импульса. И наоборот, если хочешь уменьшить размеры пакета до одной волны, и зная значение импульса, то тогда потеряешь точное положение частиц вдоль оси .
На первый взгляд, вычисленное расстояние можно интерпретировать как относительную размерность частицы. Но так как теоретически ширина пакета произвольная, и существуют другие меньшие максимумы волны, *намного интереснее рассмотреть волну как мера вероятности нахождения частиц вдоль оси Ox в любой момент времени t*.

3. Начиная с действительной функции с двумя переменными $\xi(x,t)$, можно определить комплексную функцию от тех же переменных так, что мнимая часть будет первоначальной:

$$\Psi(x,t) = a[\cos(\omega t - kx) + i\sin(\omega t - kx)].$$

В дальнейшем, используя новое обозначение для комплексных величин, а именно:

$$\Psi(x,t) = a\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}.$$

В дальнейшем испобзуем эту комплексную функцию как выражение для плоской волны.

g. Напишите с помощью тех двух обозначений уравнение неамортизированной плоской волны, которая распространяется вдоль отрицательных значений оси Оx. Найдите выражение функций синус и косинус в виде показательной функции.
h. Напишите в виде показательного уравнение для стоячей волны полученной при интерференции двух плоских неамортизированных волн с одинаковыми амплитудами, которые распространяются в двух направлениях оси Оx.

Определим плотность вероятности для нахождения одной частицы в определенной точке x в момент времени t как $|\Psi(x, t)|^2$. Это означает, что

$$\int \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)dx = 1 \ \text{ pentru orice } t,$$

где (*) обозначает сопряженное комплексной величины.
Хотим изучать квантовое состояние частицы (например, одного электрона с энергией покоя E_0 = 0.5 MeV) , которая свободно движется в одномерном промежутке длины l. Следовательно, ее потенциальная энергия равна нулю для любого $x \in [-\,l/2\ ,\ +\,l/2]$ и бесконечна при остальных значениях. (Можно представить такой промежуток как одномерный колодец с бесконечными стенами в отсутствии гравитации при предположении, что взаимодействие частиц со стенами упругие.)

i. Каково возможное минимальное значение кинетической энергии такой частицы в классической механике? Какова плотность вероятности в этом случае?

Квантовый подход к задаче подразумевает частицу как разные стоячие волны (виды колебаний) Ψ имеющих узлы при $x = \pm\, l/2$, называемой "волновыми функциями", *каждому виду колебаний соответсвует квантовое состояние частицы*.

j. Определите значение E_n для кинетической энергии одной частицы, соответсвующей n-ному виду колебаний (n называется "квантовым числом"). Оцените E_1 одного электрона при l = 1 Å.
k. Напишите волновую функцию Ψ_1 соответсвующую "основному состоянию" и волновую функцию Ψ_2 соответсвующую первой "возбужденному состоянию", и выразите их амплитуды c_1 и c_2 как функцию от l. Вычислите вероятность нахождения частицы в центральной трети в промежутке каждого из тех двух состояний.

Аналогично тому, как струна музыкального инструмента не останавливается на одном колебании, а соответствует наложению возможных стоячих волн, также и состояние частицы состоит из совокупности волновых функций с определнными коэффициентами α_n представляющими вес каждого "чистого" состояния:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Psi_n(x,t)\ .$$

l. Рассмотрим $\alpha_n = 0$ для всех $n > 2$ и найдем отношение существующее между α_1 и α_2.

На самом деле, этот результат действителен для любого n и он показывает, что Ψ_n не интерферирует между ними. Более того, они ведут себя как независимые единичные векторы в пространстве бесконечного размера, $\Psi(x,t)$ являясь вектором с координатами $\{\alpha_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

Окончательно вернемся к предположению, что существуют только “чистые” состояния и предположим случай, когда частица движется свободно внутри прямоугольной ямы с размерами $l_x \times l_y \times l_z$. Снова потенциальная энергия равна нулю внутри ямы и бесконечна снаружи, а взаймодействие со стенками упруги, а в этом случае волновая функция зависит от четырех действительных переменных : x, y, z и t. Это означает, что сейчас понадобится три квантовых числа, по одному на каждой оси: n_x, n_y, şi n_z.

m. Каково минимальное возможное значение кинетической энергии такой частицы в классичекой механике? Какова плотность вероятности в этом случае?
n. Запишите выражение кинетической энергиии частицы как функцию от E_0, c, l_x, l_y, l_z, n_x, n_y, n_z и $\hbar$.

Легко заметить, что могут существовать ситуации , в которых частица имела бы одинаковые кинетические энергии для разных множеств квантовых чисел. Они называются “вырожденными”. Тривиальное условие, которое достаточно для вырожденности это то, что по крайней мере две стороны ямы равны.
o. Для $l_x = l_y = l_z = 1$Å, оцените кинетическую энергию электрона соответствующую основному состоянию. Является ли это состояние вырожденным?
p. Найдите один пример вырожденности при котором размеры ям не равны.
q. Напишите уравнение для $\Psi_{nx,ny,nz}(x,y,z,t)$ и определите значение $c_{nx,ny,nz}$ как функцию от l_x, l_y şi l_z.