PROBLEMA 1. CONDENSATOR “EXTENSIBIL”

Un condensator plan-paralel are armături circulare de arie S, aflate inițial la distanța d una de cealaltă. Fiecare armătură are masa m şi se poate mişca fără frecare de-a lungul câte unei tije fixe orizontale lungi şi subțiri, perfect conductoare, care trece printr-un mic orificiu din centrul plăcii. Tijele sunt unite în dreptul centrului condensatorului prin intermediul unui tampon de cauciuc perfect izolator, de grosime neglijabilă. Efectul tijelor asupra câmpurilor electric şi magnetic din interiorul (şi din afara) condensatorului este neglijabil. Fiecare placă face tot timpul contact perfect cu tija corespunzătoare. Plăcile sunt menținute inițial în repaus şi sunt încărcate fiecare cu sarcina electrică pozitivă Q. Condensatorul este plasat în vid; se cunosc permitivitatea electrică a vidului ε_0 şi viteza luminii în vid c. Se aplică tijelor o tensiune constantă U şi plăcile sunt lăsate libere.

a. Exprimă sarcina Q în funcție de S, d, ε_0 şi U, astfel încât plăcile să rămână în continuare în repaus. Este echilibrul lor stabil? Argumentează.

Pe tot restul problemei presupune că sarcina electrică Q are valoarea determinată mai sus. La momentul de timp $t = 0$, plăcilor li se imprimă un foarte mic impuls care le scoate din echilibru, astfel încât ele încep să se depărteze una de alta. Notează cu $x(t)$ distanța dintre armături la un moment oarecare de timp t.

b. Scrie ecuația diferențială care exprimă $x(t)$.

c. Transformă ecuația astfel încât ea să descrie dependența $v(x)$ (viteza de variație a *distanței dintre plăci*). Rezolvă ecuația în funcție de m, S, d, ε_0, U şi x.

d. Determină viteza de variație în timp a intensității câmpului electric E din interiorul condensatorului.

Fie punctele din interiorul condensatorului aflate la distanța r de axa ce trece prin centrul plăcilor, unde r este mult mai mică decât raza armăturilor.

e. Exprimă mărimea inducției câmpului magnetic B din aceste puncte în funcție de m, S, d, ε_0, c, U, x şi r. Cum sunt orientate liniile câmpului magnetic?

În interiorul condensatorului, la distanța r de axa ce trece prin centrul plăcilor, este plasat un mic inel dielectric subțire având aria A şi momentul de inerție I, încărcat cu sarcina electrică pozitivă q. Planul inelului include axa care trece prin centrul armăturilor. Neglijează tot timpul inductanța tuturor elementelor din problemă.

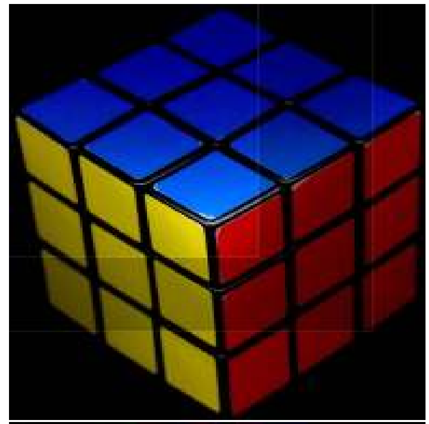
La momentul de timp $t = 0$ inelul este lăsat liber, permițându-i-se doar să se rotească fără frecare în jurul propriei axe.

f. Care va fi viteza unghiulară maximă a inelului şi care va fi distanța dintre armături în acel moment?

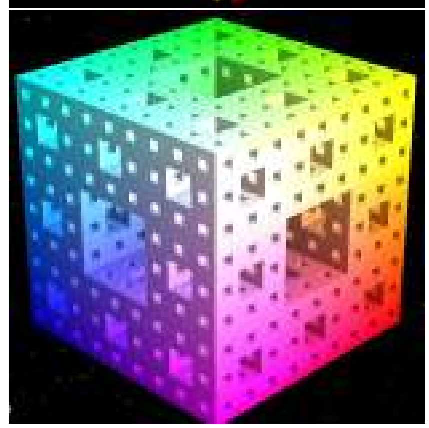
g. Exact în momentul în care inelul atinge viteza unghiulară maximă, tensiunea electrică este întreruptă. Care va fi viteza unghiulară a inelului în momentul imediat următor?

PROBLEMA 2. FIZICĂ FRACTALĂ

1. Mai mult ca sigur că îți este foarte cunoscut cubul Rubik. Este o jucărie sub formă de cub, cu fiecare față colorată diferit, alcătuită din 9 cuburi mai mici, ca în prima imagine. În total sunt deci 27 de cuburi mai mici (cel central nu se poate vedea decât dacă desfaci cubul inițial).

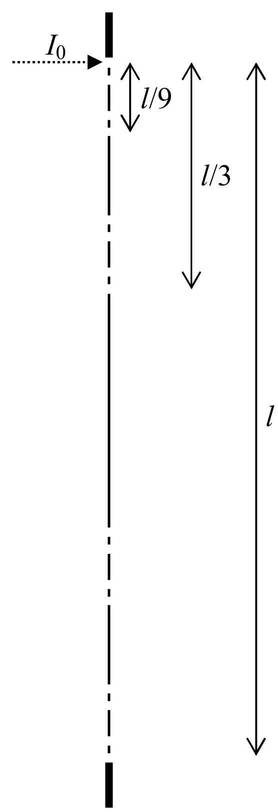


Se elimină acest cub central și cele 6 cuburi din centrul fețelor. Rămân deci 20 de cuburi și acum se poate vedea prin centrul cubului inițial.
Se aplică aceeași procedură pentru fiecare dintre cele 20 de cuburi rămase și se continuă tot așa la nesfârșit. În final, se obține un obiect fractal ca în cea de-a doua imagine, numit "burete Menger" (sau "cub Sierpinski").



Calculează momentul de inerție al corpului obținut astfel, având masa m și lungimea muchiei l, în raport cu axa care trece prin centrele a două fețe opuse.

2. Se consideră o rețea de difracție unidimensională de forma așa numitei "mulțimi Cantor". Pentru a obține o astfel de rețea, se începe prin acoperirea treimii centrale a unei fante înguste cu deschiderea l. Se obturează apoi treimile centrale ale celor două treimi rămase după primul pas, și tot așa. Rezultatul final arată ca în figura alăturată.



Fie N numărul maxim posibil din punct de vedere fizic de aplicări ale procedeului și I_0 intensitatea luminii monocromatice care cade normal pe fiecare trăsătură a rețelei. Consideră lumina difractată sub unghiul α; presupune tot timpul că apertura trăsăturilor poate fi aproximată ca fiind punctiformă.
a. Scrie diferența de drum corespunzătoare primelor două trăsături din capătul superior al rețelei, în funcție de l, N și α. Calculează intensitatea luminii difractate de cele două trăsături ca funcție de α, ignorând celelalte deschideri.
b. Notează $2\pi l \sin\alpha / 3^N \lambda$ cu x. Trasează graficul $I(x)$.
c. În mod similar, calculează $I(\alpha)$ pentru primele patru trăsături din capătul superior al rețelei și trasează din nou $I(x)$.
[*Indicație*: Pentru simplitate, presupune că soluțiile netriviale ale ecuației $\mathrm{tg}(x) + 3\,\mathrm{tg}(3x) = 0$ sunt $x = n\pi/6$, $n \in \mathbb{N}$.]
d. Exprimă $I(\alpha)$ pentru întreaga rețea în funcție de I_0, l, N și α și încearcă să deduci tiparul general al figurii de difracție.

PROBLEMA 3. O INTRODUCERE ÎN MECANICA CUANTICĂ

În cele ce urmează, energia cinetică a unei particule se consideră a fi mult mai mică decât energia ei de repaus, astfel încât să poată fi scrisă în manieră newtoniană:

$$E = E_0 + \frac{m_0 v^2}{2} = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} = f(p) .$$

1. Ecuația unei unde plane neamortizate care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox este

$$\xi(x,t) = a\sin(\omega t - kx) ,$$

unde argumentul funcției sinus se numeşte “faza” undei, iar k se numeşte “numărul de undă” şi este egal cu $2\pi/\lambda$.
Viteza de fază c se defineşte ca fiind viteza cu care se deplasează în spațiu o valoare oarecare a fazei undei, deci strict vorbind ea nu reprezintă altceva decât viteza de propagare a undei.

a. Exprimă viteza de fază în funcție de ω şi k.

Consideră acum două unde plane neamortizate propagându-se în sensul pozitiv al axei Ox, cu ω-uri şi k-uri aproape egale:

$$\xi_1(x,t) = a_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \ , \ \xi_2(x,t) = a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \ ; \ \omega_1 \approx \omega_2 \ , \ k_1 \approx k_2 \ .$$

b. Ținând cont de interferența acestor unde la un moment oarecare de timp t, determină punctele de pe axa Ox corespunzătoare maximelor amplitudinii undei rezultante la acel moment.

Să definim viteza de grup v_g ca fiind viteza cu care se deplasează aceste puncte de-a lungul axei Ox.

c. Exprimă viteza de grup în funcție de $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ şi $\Delta k = k_2 - k_1$.

Acum, în loc de doar două unde, consideră un “pachet” de unde cu ω-uri într-un domeniu foarte îngust $\Delta\omega$ din jurul lui ω_0, şi cu k-uri într-un domeniu foarte îngust Δk din jurul lui k_0. În acest caz se poate gândi că ω variază liniar cu k, $\Delta\omega/\Delta k$ reprezentând gradientul (panta). De asemenea, se poate vorbi despre o densitate de amplitudine aproape constantă, $a/\Delta k$.

d. Scrie expresia undei rezultante în funcție de a, ω_0, $\Delta\omega$, k_0, Δk, x şi t. Pentru un moment oarecare de timp t, estimează raportul dintre cele mai mari două amplitudini. De asemenea, arată că expresia găsită pentru v_g rămâne în continuare valabilă.

[*Indicație*: Ecuația tg $\alpha = \alpha$ are, pe lângă soluția evidentă $\alpha = 0$, soluțiile aproximative $\alpha = \pm (2n+1)\ \pi/2$, $n = 1, 2,\ldots$]

2. Se ştie că energia şi impulsul unui foton pot fi exprimate în funcție de frecvența şi/sau lungimea de undă a radiației electromagnetice corespunzătoare:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu = \hbar\omega \; ; \; p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{h}{2\pi} = \hbar k \; ; \; \hbar \approx 10^{-34}\,\text{Js}.$$

Louis DeBroglie a avansat ipoteza extinderii relațiilor de mai sus pentru toate particulele microscopice. Astfel, oricărei particule care se deplasează de-a lungul axei Ox i se poate asocia ecuația unei unde plane neamortizate:

$$\xi(x,t) = a\sin\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right).$$

Mai mult, să considerăm acum că fiecare particulă este echivalentă cu un pachet de unde centrate pe $E/\hbar$ şi $p/\hbar$.

e. Arată că în această situație v_g reprezintă pur şi simplu viteza particulei.

Rezultatele de mai sus ne conduc la ideea că maximul principal al pachetului ar putea fi interpretat drept o indicație cu privire la poziția particulei de-a lungul axei Ox la un moment oarecare de timp t.

f. Calculează distanța Δx dintre centrul pachetului şi minimul cel mai apropiat şi arată că $\Delta x \Delta p = h$.

Aceasta înseamnă că dacă îți doreşti o precizie cât mai bună în privința centrului pachetului, atunci trebuie să accepți domenii tot mai largi pentru valoarea impulsului acesteia. Reciproc, dacă încerci să reduci pachetul la doar o singură undă, corespunzând exact valorii impulsului, pierzi acuratețea poziției particulei de-a lungul axei.
La prima vedere, distanța calculată mai sus ar putea fi interpretată ca o indicație cu privire la dimensiunea relativă a particulei. Însă din moment ce teoretic lărgimea pachetului este arbitrară şi mai există şi alte maxime mai mici ale undei rezultante, *este mult mai interesant să privim unda rezultantă drept o măsură a probabilității de a găsi particula de-a lungul axei Ox la un moment oarecare de timp t*.

3. Plecând de la funcția reală de două variabile $\xi(x,t)$, se poate defini de o manieră firească o funcție complexă de aceleaşi două variabile, astfel încât partea ei imaginară să reprezinte funcția originară:

$$\Psi(x,t) = a[\cos(\omega t - kx) + i\sin(\omega t - kx)].$$

În cele ce urmează, vom folosi o altă notație pentru mărimile complexe, şi anume:

$$\Psi(x,t) = a\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}.$$

În cele ce urmează vom adopta această funcție complexă ca expresie a unei unde plane.

g. Scrie cu ambele notații ecuația unei unde plane neamortizate care se propagă în sensul negativ al axei Ox. Determină expresiile funcțiilor sinus şi cosinus sub formă exponențială.
h. Scrie sub formă exponențială ecuația pentru o undă staționară obținută prin interferența a două unde plane neamortizate cu amplitudini egale, care se propagă în cele două sensuri ale axei Ox.

Să definim densitatea de probabilitate de găsire a unei particule într-un anumit punct x la un anumit moment de timp t ca fiind $|\Psi(x, t)|^2$. Aceasta înseamnă că

$$\int \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)dx = 1 \quad \text{pentru orice } t,$$

unde steluța (*) semnifică notația pentru conjugata complexă a mărimii respective.
Vrem să studiem stările cuantice ale unei particule (de exemplu, ale unui electron cu energia de repaus E_0 = 0.5 MeV) ce se mişcă liber într-o regiune unidimensională cu lungimea l. În consecință, energia ei potențială este zero pentru orice $x \in [-l/2, +l/2]$ şi infinită în rest. (Vă puteți imagina o astfel de regiune ca pe un puț unidimensional cu pereți infinit de înalți, în absența gravitației, presupunând că interacțiunile particulei cu pereții sunt perfect elastice.)

i. Care este cea mai mică valoare posibilă a energiei cinetice a unei astfel de particule în mecanica clasică? Care este densitatea de probabilitate în acest caz?

Abordarea cuantică a problemei constă în a asimila particula cu diferite unde staționare (moduri de oscilație) Ψ având noduri la $x = \pm l/2$, numite "funcții de undă", *fiecare mod de oscilație corespunzând unei stări cuantice a particulei.*

j. Determină valorile E_n ale energiei cinetice ale unei particule, corespunzând celui de-al n-lea mod de oscilație (n se numeşte "număr cuantic"). Evaluează E_1 a unui electron pentru l = 1 Å.
k. Scrie funcția de undă Ψ_1 corespunzătoare "stării fundamentale" şi funcția de undă Ψ_2 corespunzătoare primei "stări excitate", şi exprimă amplitudinile lor c_1 şi c_2 în funcție de l. Calculează probabilitățile de a găsi particula în treimea centrală a regiunii în fiecare din cele două stări.

Exact la fel cum coarda unui instrument muzical nu se stabilizează pe un singur mod de oscilație, ci este supusă unei suprapuneri de unde staționare posibile, la fel şi starea propriu-zisă a particulei constă dintr-un amestec de funcții de undă cu anumiți coeficienți α_n reprezentând ponderile fiecărei stări "pure":

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Psi_n(x,t)\ .$$

l. Consideră $\alpha_n = 0$ pentru toți n > 2 şi găseşte relația care trebuie să existe între α_1 şi α_2.

În fapt, rezultatul acesta este valabil pentru orice n şi el arată că Ψ_n nu interferă între ele. Mai curând, ele se comportă ca nişte versori ai unui spațiu infinit dimensional, $\Psi(x,t)$ fiind în esență un vector de coordonate $\{\alpha_n \mid n = 1, 2,\ldots\}$.

În fine, să revenim acum la presupunerea că există doar stări “pure” şi să considerăm cazul în care particula se mişcă liber în interiorul unei incinte paralelipipedice cu dimensiunile $l_x \times l_y \times l_z$. Încă o dată energia potențială este zero în interiorul cutiei şi infinită în exterior, iar interacțiunile cu pereții sunt absolute elastice, dar de această dată funcția de undă depinde de patru variabile reale: x, y, z şi t. Aceasta înseamnă că acum vom avea nevoie de trei numere cuantice, câte unul pentru fiecare axă: n_x, n_y, şi n_z.

m. Care este valoarea minimă posibilă a energiei cinetice a unei astfel de particule în mecanica clasică? Care este densitatea de probabilitate în acest caz?
n. Scrie expresia energiei cinetice a particulei în funcție de E_0, c, l_x, l_y, l_z, n_x, n_y, n_z şi $\hbar$.

Se poate vedea uşor că pot exista situații în care particula să aibă aceeaşi energie cinetică pentru nişte seturi diferite de numere cuantice. Acest fapt este numit “degenerare”. O condiție banală suficientă pentru a avea degenerare este ca cel puțin două din dimensiunile cutiei să fie egale.

o. Pentru $l_x = l_y = l_z = 1$Å, evaluează energia cinetică a electronului, corespunzătoare stării fundamentale. Este această stare degenerată?
p. Găseşte un exemplu de degenerare în cazul în care dimensiunile cutiei nu sunt egale.
q. Scrie ecuația pentru $\Psi_{nx,ny,nz}(x,y,z,t)$ şi determină valoarea lui $c_{nx,ny,nz}$ în funcție de l_x, l_y şi l_z.