Шесто състезание Romanian Master of Mathematics

Първи ден: Петък, 1 Март, 2013, Букурещ

Language: Bulgarian

Задача 1. Дадено е естествено число a. Дефинираме редицата от естествени числа $x_1, x_2, \dots$ чрез равенствата $x_1 = a$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$ за $n \geq 1$. Нека $y_n = 2^{x_n} - 1$. Да се намери най-голямото естествено число k, за което съществува такова a, че числата $y_1, \dots, y_k$ са прости.

Задача 2. Съществува ли двойка функции (g, h), $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които единствената функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяваща $f(g(x)) = g(f(x))$ и $f(h(x)) = h(f(x))$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, е идентитетът $f(x) \equiv x$?

Задача 3. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност ω. Правите AB и CD се пресичат в точка P, правите AD и BC се пресичат в точка Q, а диагоналите AC и BD се пресичат в точка R. Нека M е средата на отсечката PQ и K е пресечната точка на отсечката MR и окръжността ω. Да се докаже, че окръжността, описана около триъгълника KPQ и ω се допират.

Всяка от задачите се оценява със 7 точки.
Време за работа $4\frac{1}{2}$ часа.