The 6$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Első nap: 2013. március 1. (péntek), Bukarest

Language: Hungarian

1. feladat Egy pozitív egész a számhoz definiáljuk egészeknek egy $x_1, x_2, \ldots$ sorozatát a következőképpen: $x_1 = a$ és $n \geq 1$-re $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Legyen $y_n = 2^{x_n} - 1$. Határozzuk meg k legnagyobb lehetséges értékét, amire alkalmas a pozitív egészre az $y_1, \ldots, y_k$ számok mindegyike prím.

2. feladat Létezik-e $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló olyan (g, h) pár, amire igaz, hogy az egyedüli $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire teljesül $f(g(x)) = g(f(x))$ és $f(h(x)) = h(f(x))$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, az identikus $f(x) \equiv x$ függvény?

3. feladat Legyen $ABCD$ az ω körbe beírt négyszög. Az AB és CD egyenesek metszéspontja legyen P, az AD és BC egyenesek metszéspontja legyen Q, az AC és BD átlók metszéspontja legyen R. Legyen M a PQ szakasz felezőpontja, és K legyen az MR szakasz és az ω kör metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a KPQ háromszög körülírt köre és az ω kör érintik egymást.

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.
Munkaidő 4 és fél óra.