The 6^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 1, 2013, Bucharest

Language: Italian

Problema 1. Dato un intero positivo a, si definisca una successione di interi $x_1, x_2, \ldots$ ponendo $x_1 = a$ e $x_{n+1} = 2x_n + 1$ per ogni $n \geq 1$. Sia inoltre $y_n = 2^{x_n} - 1$. Determinare il più grande k per cui, per un qualche intero positivo a, i numeri $y_1, \ldots, y_k$ sono tutti primi.

Problema 2. Determinare se esistono due funzioni $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che l'unica funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa $f(g(x)) = g(f(x))$ e $f(h(x)) = h(f(x))$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è la funzione identità $f(x) \equiv x$.

Problema 3. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza ω. Le rette AB e CD si incontrano in P, le rette AD e BC si incontrano in Q, e le diagonali AC e BD si incontrano in R. Sia M il punto medio del segmento PQ, e K l'intersezione tra il segmento MR e la circonferenza ω. Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo KPQ e ω sono tangenti.

Ognuno dei tre problemi vale 7 punti.

Tempo a disposizione: 4 ore e mezza.