# 6. Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

Dzień 1: piątek, 1 marca 2013 r., Bukareszt

Language: Polish

**Zadanie 1.** Dla dodatniej liczby całkowitej $a$ określamy ciąg liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots$ wzorami: $x_1 = a$ oraz $x_{n+1} = 2x_n + 1$ dla $n \geq 1$. Niech $y_n = 2^{x_n} - 1$. Wyznaczyć największą taką wartość $k$, że dla pewnej liczby $a$ wszystkie liczby $y_1, \ldots, y_k$ są pierwsze.

**Zadanie 2.** Czy istnieje taka para $(g, h)$ funkcji $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że jedyną funkcją $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającą równości

$$f(g(x)) = g(f(x)) \qquad \text{oraz} \qquad f(h(x)) = h(f(x))$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest funkcja tożsamościowa $f(x) \equiv x$?

**Zadanie 3.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg $\omega$. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $P$, proste $AD$ i $BC$ — w punkcie $Q$, a przekątne $AC$ i $BD$ — w punkcie $R$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $PQ$, a odcinek $MR$ przecina okrąg $\omega$ w punkcie $K$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie $KPQ$ jest styczny do okręgu $\omega$.

Za każde zadanie można otrzymać do 7 punktów.
Czas pisania $4\frac{1}{2}$ godziny.