The 6^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-feira, 1 de março de 2013, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 1. Dado um inteiro positivo a, definimos a sequência de inteiros $x_1, x_2, \ldots$ por $x_1 = a$ e $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $n \geq 1$. Seja $y_n = 2^{x_n} - 1$. Determine o maior valor de k para o qual existe um inteiro positivo a tal que todos os números $y_1, \ldots, y_k$ são primos.

Problema 2. Existe um par (g, h) de funções $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a única função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(g(x)) = g(f(x))$ e $f(h(x)) = h(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é a função identidade $f(x) \equiv x$?

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um circulo ω. As retas AB e CD cortam-se em P, as retas AD e BC cortam-se em Q e as diagonais AC e BD cortam-se em R. Seja M o ponto médio de PQ e K o ponto de interseção do segmento MR e do círculo ω. Prove que o circuncírculo do triângulo KPQ e ω são tangentes.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.