The 6^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Ziua 1: vineri, 1 martie 2013, Bucureşti

Limba: Română

Problema 1. Pentru un număr întreg a, şirul de numere întregi $x_1, x_2, \ldots$ este definit prin $x_1 = a$ şi $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $n \geq 1$. Fie $y_n = 2^{x_n} - 1$. Să se determine cel mai mare k posibil, pentru care există un număr întreg a strict pozitiv, astfel încât toate numerele $y_1, \ldots, y_k$ să fie prime.

Problema 2. Există o pereche (g, h) de funcţii $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât singura funcţie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru care $f(g(x)) = g(f(x))$ şi $f(h(x)) = h(f(x))$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este funcţia identitate $f(x) \equiv x$?

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul ω. Dreptele AB şi CD se intersectează în punctul P, dreptele AD şi BC se intersectează în punctul Q, iar diagonalele AC şi BD se intersectează în punctul R. Fie M mijlocul segmentului PQ şi K punctul în care segmentul MR intersectează cercul ω. Să se arate că cercul circumscris triunghiului KPQ este tangent cercului ω.

Fiecare problemă este punctată cu 7 puncte.
Timpul acordat $4\frac{1}{2}$ ore.