

# The 6<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

1. дан - Букурешт, петак 1. март 2013. године

Language: Serbian

**Проблем 1.** За природан број  $a$ , дефинише се низ природних бројева  $x_1, x_2, \dots$  на следећи начин:  $x_1 = a$  и  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , за  $n \geq 1$ . Нека је  $y_n = 2^{x_n} - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Одредити највеће  $k$  такво да, за неки природан број  $a$ , бројеви  $y_1, \dots, y_k$  буду прости.

**Проблем 2.** Постоји ли пар  $(g, h)$  функција  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таквих да је једина функција  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  која задовољава услове  $f(g(x)) = g(f(x))$  и  $f(h(x)) = h(f(x))$ , за све  $x \in \mathbb{R}$ , идентичка функција  $f(x) \equiv x$ ?

**Проблем 3.** Четвороугао  $ABCD$  уписан је у кружницу  $\omega$ . Праве  $AB$  и  $CD$  секу се у тачки  $P$ , праве  $AD$  и  $BC$  у тачки  $Q$ , а дијагонале  $AC$  и  $BD$  у тачки  $R$ . Нека је  $M$  средиште дужи  $PQ$ , а  $K$  заједничка тачка дужи  $MR$  и кружнице  $\omega$ . Доказати да кружница описана око троугла  $KPQ$  додирује  $\omega$ .

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Време за израду задатака је 4 сата и 30 минута.