

The 6th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 1, 2013, Bucharest

Language: Ukrainian

Problem 1. Для натурального числа a , визначимо послідовність натуральних чисел x_1, x_2, \dots умовами $x_1 = a$ і $x_{n+1} = 2x_n + 1$ для $n \geq 1$. Нехай $y_n = 2^{x_n} - 1$. Знайдіть найбільше можливе число k таке, що для деякого натурального a , числа y_1, \dots, y_k є простими.

Problem 2. Чи існує така пара функцій $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що єдиною функцією $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка одночасно задовольняє умови $f(g(x)) = g(f(x))$ і $f(h(x)) = h(f(x))$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, є тотожня функція $f(x) \equiv x$?

Problem 3. У коло ω вписано чотирикутник $ABCD$. Прямі AB та CD перетинаються в точці P , прямі AD і BC в точці Q , а діагоналі AC і BD в точці R . Через M позначимо середину відрізка PQ , а через K точку перетину відрізка MR і кола ω . Доведіть, що описане коло трикутника KPQ дотикається кола ω .

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Тривалість туру: $4\frac{1}{2}$ години.