The 6^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 1, 2013, Bucharest

Language: Russian

Задача 1. Для натурального числа a определим последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots$ следующим образом: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$ при $n \geq 1$. Положим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Найдите наибольшее возможное k такое, что для некоторого натурального a каждое из чисел $y_1, \ldots, y_k$ является простым.

Задача 2. Существует ли пара (g, h) функций $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой единственной функцией $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей равенствам $f(g(x)) = g(f(x))$ и $f(h(x)) = h(f(x))$ при всех $x \in \mathbb{R}$, является $f(x) \equiv x$?

Задача 3. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC пересекаются в точке Q, а диагонали AC и BD пересекаются в точке R. Пусть M — середина отрезка PQ, и пусть K — точка пересечения отрезка MR с окружностью ω. Докажите, что окружность, описанная около треугольника KPQ, и окружность ω касаются друг друга.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время на работу: $4\frac{1}{2}$ часа.