

Шесто състезание Romanian Master of Mathematics

Втори ден: Събота, 2 Март, 2013, Букурещ

Language: Bulgarian

Задача 4. Нека P и P' са два изпъкнали четириъгълника в равнината с непразно сечение и точка O от сечението им има следното свойство: за всяка права ℓ през O общата отсечка на ℓ и P е по-дълга от общата отсечка на ℓ и P' . Възможно ли е отношението на лицето на P' към лицето на P да е по-голямо от 1.9?

Задача 5. Дадено е естествено число $k \geq 2$. Нека $a_1 = 1$ и за всяко естествено число $n \geq 2$ нека a_n е равно на най-малкото $x > a_{n-1}$, за което

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

Да се докаже, че всяко просто число е член на редицата a_1, a_2, \dots .

Задача 6. Във върховете на правилен $2n$ -ъгълник са разположени $2n$ различни пулове, по един във всеки връх. Един *ход* се състои в избиране на страна на $2n$ -ъгълника и размяна на пуловете в краищата на тази страна. След краен брой ходове се оказало, че всеки два пула са се разменяли точно по веднъж. Да се докаже, че някоя страна не е била избрана нито веднъж.

Всяка от задачите се оценява със 7 точки.

Време за работа $4\frac{1}{2}$ часа.