

# The 6<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Második nap: 2013. március 2. (szombat), Bukarest

Language: Hungarian

**4. feladat** Legyen  $P$  és  $P'$  két konvex négyszöglap a síkon (egy négyszöglaphoz a határa is hozzászámít). Tegyük fel, hogy a négyszöglapok metszete nem-üres, és legyen  $O$  egy pontja a metszetnek. Tegyük fel, hogy minden  $O$ -n átmenő  $\ell$  egyenesre  $\ell$  és  $P$  metszetszakasza szigorúan hosszabb, mint  $\ell$  és  $P'$  metszetszakasza. Lehetséges-e, hogy  $P'$  területe  $P$  területének több, mint 1,9-szerese?

**5. feladat** Legyen adott egy  $k \geq 2$  pozitív egész szám, legyen  $a_1 = 1$  és minden  $n \geq 2$ -re legyen  $a_n$  a legkisebb olyan  $x > a_{n-1}$  szám, amire

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

Bizonyítsuk be, hogy az  $a_1, a_2, \dots$  sorozatban minden prímszám előfordul.

**6. feladat**  $2n$  különböző érmét helyezünk el egy szabályos  $2n$ -szög csúcsaiba, minden csúcsba egy érmét. Egy *lépés* alatt azt értjük, hogy kiválasztjuk a  $2n$ -szög egy élét, és az annak az élnek a két végpontjában lévő érméket kicseréljük egymással. Tegyük fel, hogy véges sok lépés után mindegyik érmepár pontosan egyszer lett kicserélve. Bizonyítsuk be, hogy van olyan él, amit soha nem használtunk.

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.  
Munkaidő 4 és fél óra.