

The 6th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, March 2, 2013, Bucharest

Language: Italian

Problema 4. Siano P e P' due regioni del piano a forma di quadrilatero convesso (le regioni includono anche il bordo), e sia O un punto in comune ad esse. Sappiamo che per ogni retta ℓ passante per O il segmento $\ell \cap P$ è strettamente più lungo del segmento $\ell \cap P'$. È possibile che il rapporto tra l'area di P' e quella di P sia maggiore di 1,9?

Problema 5. Dato un intero positivo $k \geq 2$, si ponga $a_1 = 1$ e, per ogni intero $n \geq 2$, sia a_n il più piccolo numero $x > a_{n-1}$ tale che

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

Dimostrare che ogni numero primo compare nella successione a_1, a_2, \dots .

Problema 6. Sui vertici di un $2n$ -agone regolare sono disposti $2n$ segnalini diversi tra loro, un segnalino su ogni vertice. Una *mossa* consiste in scegliere un lato del $2n$ -agone e scambiare tra loro i due segnalini che si trovano agli estremi di quel lato. Dopo un numero finito di mosse, risulta che per ogni coppia di segnalini c'è stata una e una sola mossa che li ha scambiati. Dimostrare che esiste un lato che non è mai stato scelto.

Ognuno dei tre problemi vale 7 punti.
Tempo a disposizione: 4 ore e mezza.