

6. Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

Dzień 2: sobota, 2 marca 2013 r., Bukareszt

Language: Polish

Zadanie 4. Na płaszczyźnie dane są czworokąty wypukłe P i P' (wraz z wnętrzami) oraz punkt O należący do obu tych czworokątów. Przypuśćmy, że dla każdej prostej ℓ przechodzącej przez punkt O część wspólna prostej ℓ z czworokątem P jest dłuższa od części wspólnej prostej ℓ z czworokątem P' . Czy może się zdarzyć, że stosunek pola czworokąta P' do pola czworokąta P jest większy od 1,9?

Zadanie 5. Dana jest liczba całkowita $k \geq 2$. Niech $a_1 = 1$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ niech a_n będzie najmniejszą liczbą $x > a_{n-1}$ spełniającą równanie

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right].$$

Wykazać, że każda liczba pierwsza występuje w ciągu a_1, a_2, \dots .

Zadanie 6. $2n$ różnych żetonów umieszczono w wierzchołkach $2n$ -kąta foremnego, po jednym w każdym wierzchołku. *Ruch* polega na wybraniu boku $2n$ -kąta i zamianie miejscami dwóch żetonów znajdujących się na końcach wybranego boku. Przypuśćmy, że w trakcie wykonywania pewnego skończonego ciągu ruchów każda para żetonów została zamieniona dokładnie raz. Dowieść, że istnieje bok, który nie został wybrany w żadnym z ruchów.

Za każde zadanie można otrzymać do 7 punktów.

Czas pisania $4\frac{1}{2}$ godziny.