

# The 6<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 2 de Março de 2013, Bucareste

Language: Portuguese

**Problema 4.** Sejam  $P$  e  $P'$  duas regiões quadrilaterais convexas no plano (regiões incluem suas bordas) cuja interseção não é vazia. Seja  $O$  um dos pontos de interseção de  $P$  e  $P'$ . Suponha que, para toda reta  $\ell$  passando por  $O$ , o segmento de reta determinado pela interseção de  $\ell$  e  $P$  tem comprimento maior do que o segmento de reta determinado pela interseção de  $\ell$  e  $P'$ . É possível que a razão entre as áreas de  $P'$  e  $P$  seja maior do que 1,9?

**Problema 5.** Dado um inteiro  $k \geq 2$ , seja  $a_1 = 1$  e, para cada inteiro  $n \geq 2$ , seja  $a_n$  o menor  $x > a_{n-1}$  tal que

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

Prove que todo primo aparece na sequência  $a_1, a_2, \dots$

**Problema 6.**  $2n$  peças diferentes são colocadas nos vértices de um polígono regular com  $2n$  vértices, uma peça em cada vértice. Um *movimento* consiste em escolher um lado do polígono e trocar de posição as duas peças nas extremidades desse lado. Suponha que, após uma quantidade finita de movimentos, todo par de peças foi trocado de posição exatamente uma vez. Prove que algum lado nunca foi escolhido.

Cada problema vale 7 pontos.

Duração da prova:  $4\frac{1}{2}$  horas.