

# The 6<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Ziua 2: Sâmbătă, 2 martie, 2013, București

Limba: Română

**Problema 4.** Fie  $P$  și  $P'$  două regiuni patrulate convexe în plan și  $O$  un punct comun al lor (regiunile conțin frontierele). Pentru fiecare dreaptă  $\ell$ , care trece prin punctul  $O$ , segmentul  $\ell \cap P$  este mai lung decât segmentul  $\ell \cap P'$ . Este posibil ca raportul dintre aria lui  $P'$  și aria lui  $P$  să fie mai mare decât 1.9?

**Problema 5.** Fie  $k$  un număr întreg mai mare decât 1, fie  $a_1 = 1$  și, pentru fiecare număr întreg  $n \geq 2$ , fie  $a_n$  cel mai mic număr întreg  $x > a_{n-1}$  astfel încât

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

Să se arate că fiecare număr prim apare în șirul  $a_1, a_2, \dots$ .

**Problema 6.** În fiecare vârf al unui  $2n$ -gon regulat este plasat câte un jeton. O *mutare* constă în alegerea unei laturi a  $2n$ -gonului și intervertirea celor două jetoane plasate în vârfurile acesteia. După un număr finit de mutări, se constată că oricare două jetoane din configurație au fost intervertite exact o dată. Să se arate că una dintre laturile  $2n$ -gonului nu a fost aleasă niciodată.

Fiecare problemă este punctată cu 7 puncte.

Timpul acordat  $4\frac{1}{2}$  ore.