

# The 6<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, March 2, 2013, Bucharest

Language: Russian

**Задача 4.** Пусть  $P$  и  $P'$  — два выпуклых четырехугольника на плоскости, и  $O$  — точка плоскости, лежащая внутри или на границе каждого из них. Пусть для любой прямой  $\ell$ , проходящей через  $O$ , длина отрезка, по которому  $\ell$  пересекается с  $P$ , больше длины отрезка, по которому  $\ell$  пересекается с  $P'$ . Может ли отношение площади  $P'$  к площади  $P$  быть больше, чем 1,9?

**Задача 5.** Дано натуральное число  $k \geq 2$ . Положим  $a_1 = 1$ , и для каждого натурального  $n \geq 2$  определим  $a_n$  как наименьшее число  $x$  такое, что  $x > a_{n-1}$  и

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right].$$

Докажите, что каждое простое число содержится в последовательности  $a_1, a_2, \dots$ .

**Задача 6.** В вершинах правильного  $2n$ -угольника расставлены  $2n$  различных фишек так, что в каждой вершине стоит ровно одна фишка. *Ход* состоит в следующем: выбирается одна из сторон  $2n$ -угольника и две фишки, находящиеся в концах этой стороны, меняются местами друг с другом. После конечного числа ходов оказалось, что каждая пара фишек менялась местами ровно один раз. Докажите, что некоторая сторона  $2n$ -угольника не выбиралась ни разу.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время на работу:  $4\frac{1}{2}$  часа.