The 7^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Ден 1: Петък, 27 февруари 2015, Букурещ

Language: Bulgarian

Задача 1. Съществува ли безкрайна редица от цели положителни числа a_1, a_2, a_3, ..., такава, че a_m и a_n са взаимно прости тогава и само тогава, когато $|m - n| = 1$?

Задача 2. Дадено е естествено число $n \geq 5$. Двама играчи играят следната игра върху правилен n-ъгълник. В началото са избрани три последователни върха и във всеки от тях е поставен по един пул. На всеки ход един играч приплъзва един от пуловете по страните на n-ъгълника до друг връх, без при това да прескача друг пул. Един ход наричаме *позволен*, ако лицето на триъгълника, образуван от пуловете, е строго по-голямо след хода, отколкото преди него. Играчите се редуват да правят позволени ходове, като губи този, който не може да направи такъв ход. За кои стойности на n играчът, който прави първия ход, има печеливша стратегия?

Задача 3. На черната дъска е записан краен списък от рационални числа. *Операция* наричаме следното: избираме две произволни числа a и b, изтриваме ги, и на тяхно място записваме едно от числата

$$a + b,\ a - b,\ b - a,\ a \times b,\ a/b \text{ (ако } b \neq 0),\ b/a \text{ (ако } a \neq 0).$$

Докажете, че за всяко естествено число $n > 100$ съществуват само краен брой цели $k \geq 0$, такива, че, започвайки от списъка

$$k + 1,\ k + 2,\ \ldots,\ k + n,$$

е възможно да получим числото $n!$ след $n - 1$ операции.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа $4\frac{1}{2}$ часа.