

## 第 7 届罗马尼亚大师杯数学邀请赛

第一天：2015 年 2 月 27 日星期五，布加勒斯特

Language: Chinese

1. 是否存在一个正整数的无穷数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , 满足:  $a_m$  与  $a_n$  互素

当且仅当:  $|m - n| = 1$ ?

2. 两名玩家在一个正  $n$  边形 ( $n \geq 5$ ) 边界上玩游戏. 一开始时有三枚棋子位于正  $n$  边形的连续三个顶点处 (每一个顶点上各有一枚棋子), 然后玩家轮流进行如下操作: 选取其中的一枚棋子, 沿正  $n$  边形的边界移动到另一个没有棋子的顶点, 中间可以经过任意多条边, 但不可跨越其它棋子, 使得以这三枚棋子为顶点的三角形面积在移动后比移动前严格增加. 规定当一名玩家无法按照上述规则移动棋子时, 该名玩家即为输家. 试问: 对哪些  $n$ , 先手有必胜策略?
3. 在黑板上写着一列有限个有理数, 一次操作是指: 从这列数字中任选两数  $a$  与  $b$ , 擦去它们, 写下如下形式中的一种:

$$a + b, a - b, b - a, a \times b, \frac{a}{b} (\text{如果 } b \neq 0), \frac{b}{a} (\text{如果 } a \neq 0).$$

求证: 对于每一个给定的正整数  $n > 100$ , 仅存在有限多个整数  $k \geq 0$ ,

使得由  $k + 1, k + 2, \dots, k + n$  构成的一列数字, 在  $n - 1$  次操作后得到  $n!$ .

说明: 每题 7 分, 比赛时间为 4.5 小时.