

# The 7<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Jour 1: Vendredi 27 Février 2015, Bucarest

Language: French

**Problème 1.** Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs  $a_1, a_2, a_3, \dots$  telle que  $a_m$  et  $a_n$  sont premiers entre eux si et seulement si  $|m - n| = 1$  ?

**Problème 2.** Soit  $n$  un entier  $\geq 5$ . Deux personnes jouent au jeu suivant sur un polygone régulier à  $n$  côtés. Initialement, on choisit trois sommets consécutifs, et un pion est placé sur chacun d'eux. Un mouvement d'un joueur consiste à glisser un pion le long d'un nombre quelconque d'arêtes jusqu'à un autre sommet du polygone sans passer par-dessus un autre pion. On dit que le mouvement est *légal* si l'aire du triangle formé par les pions est strictement plus grande après le mouvement qu'avant.

Les joueurs effectuent à tour de rôle des mouvements légaux ; un joueur perd dès qu'il ne peut plus effectuer de mouvement légal. Pour quelles valeurs de  $n$  le joueur qui effectue le premier mouvement possède-t-il une stratégie gagnante ?

**Problème 3.** Une liste finie de nombres rationnels est écrite sur un tableau. Lors d'une *opération*, on choisit deux nombres  $a$  et  $b$ , on les efface, et on écrit l'un des nombres suivants :

$$a + b, a - b, b - a, a \times b, a/b \text{ (si } b \neq 0), b/a \text{ (si } a \neq 0).$$

Montrer que pour tout entier  $n > 100$ , il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $k \geq 0$  tels que, partant de la liste

$$k + 1, k + 2, \dots, k + n,$$

il est possible d'obtenir la valeur  $n!$  après  $n - 1$  opérations.

Chaque problème est noté sur 7 points.

Durée de l'épreuve : 4 heures 30 minutes.