

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Primo giorno: venerdì 27 febbraio 2015, Bucharest

Language: Italian

Problema 1. Esiste una successione infinita di interi positivi a_1, a_2, a_3, \dots tale che a_m e a_n sono relativamente primi se e solo se $|m - n| = 1$?

Problema 2. Dato un intero $n \geq 5$, due giocatori giocano il seguente gioco su un n -agone regolare. Inizialmente si scelgono tre vertici consecutivi e si pone una pedina su ciascuno di essi. Per compiere una mossa, un giocatore sposta una pedina lungo un certo numero di lati fino a un altro vertice dell' n -agone, senza però scavalcare un'altra pedina. Una mossa è *legale* se l'area del triangolo formato dalle pedine dopo la mossa è strettamente maggiore rispetto a prima della mossa. I giocatori compiono a turno mosse legali, e se un giocatore non può compiere una mossa legale perde. Per quali valori di n il giocatore che compie la prima mossa ha una strategia vincente?

Problema 3. Su una lavagna è scritta una lista finita di numeri razionali. Per effettuare un'*operazione*, scegliamo due numeri qualsiasi a e b , li cancelliamo, e scriviamo sulla lavagna uno fra i numeri

$$a + b, a - b, b - a, a \times b, a/b \text{ (se } b \neq 0), b/a \text{ (se } a \neq 0).$$

Dimostrare che, per ogni intero $n > 100$, esistono solo un numero finito di interi $k \geq 0$ tali che, partendo dalla lista

$$k + 1, k + 2, \dots, k + n,$$

è possibile ottenere, dopo $n - 1$ operazioni, il valore $n!$.

Ogni problema vale 7 punti.

Tempo: 4 ore e 30 minuti.