7. Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

Dzień 1: piątek, 27 lutego 2015 r., Bukareszt

Language: Polish

Problem 1. Czy istnieje taki nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$, że a_m i a_n są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy $|m-n| = 1$?

Problem 2. Dla ustalonej liczby całkowitej $n \geq 5$, dwóch graczy gra w następującą grę na n-kącie foremnym. Na samym jej początku wybrane zostają trzy kolejne wierzchołki, a na każdym z nich postawiony zostaje pionek. Ruch gracza polega na przesunięciu jednego pionka wzdłuż dowolnej liczby krawędzi do innego wierzchołka n-kąta bez przeskakiwania innych pionków. Ruch jest *dozwolony*, jeśli pole trójkąta utworzonego przez pionki jest ściśle większe po ruchu niż przed nim. Gracze na zmianę wykonują dozwolone ruchy i jeśli gracz nie może wykonać dozwolonego ruchu, to ten gracz przegrywa. Dla jakich wartości n gracz wykonujący pierwszy ruch posiada strategię wygrywającą?

Problem 3. Skończona lista liczb wymiernych jest zapisana na tablicy. W ramach pojedynczej *operacji* wybieramy dowolne dwie liczby a, b, zmazujemy je i zapisujemy jedną z liczb

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b\ (\text{jeśli } b\neq 0),\ b/a\ (\text{jeśli } a\neq 0).$$

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 100$ istnieje tylko skończenie wiele liczb całkowitych $k \geq 0$ takich, że zaczynając od listy

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

można otrzymać po $n-1$ operacjach wartość $n!$.

Każdy z trzech problemów wart jest 7 punktów.
Czas pisania: $4\frac{1}{2}$ godziny.