The 7^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-feira, 27 de Fevereiro de 2015, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 1. Existe alguma sequência infinita de inteiros positivos a_1, a_2, a_3, ... tal que a_m e a_n são primos entre si se e somente se $|m - n| = 1$?

Problema 2. Para um inteiro $n \geq 5$, dois jogadores jogam o seguinte jogo em um n-ágono regular. Inicialmente, três vértices consecutivos são escolhidos e uma ficha é colocada em cada um deles. Um movimento consiste de um jogador deslizar uma ficha por um número qualquer de lados até outro vértice do n-ágono sem passar por cima de outra ficha. Um movimento é *legal* se a área do triângulo formado pelas fichas é estritamente maior depois do movimento do que era antes. Os jogadores se alternam fazendo movimentos legais e se um jogador não pode fazer um movimento legal, este jogador perde. Para quais valores de n o jogador que faz o primeiro movimento possui estratégia vencedora?

Problema 3. Uma lista finita de números racionais está escrita em uma lousa. Em uma *operação*, nós escolhemos dois números quaisquer a, b, apagamos eles e escrevemos um dos números

$$a + b,\ a - b,\ b - a,\ a \times b,\ a/b \text{ (se } b \neq 0),\ b/a \text{ (se } a \neq 0).$$

Prove que, para qualquer inteiro $n > 100$, existe uma quantidade finita de inteiros $k \geq 0$, tal que, começando com a lista

$$k + 1,\ k + 2,\ \ldots,\ k + n,$$

seja possível obter, após $n - 1$ operações, o número $n!$.

Cada um dos problemas vale 7 pontos.
Duração: 4 horas e 30 minutos.