The 7^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, February 27, 2015, Bucharest

Language: Russian

Задача 1. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такая, что числа a_m и a_n взаимно просты тогда и только тогда, когда $|m-n|=1$?

Задача 2. Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число. Двое играют в следующую игру на правильном n-угольнике. В начале игры выбраны три последовательных вершины, и в каждой из них стоит по фишке. За ход нужно передвинуть одну из фишек по произвольному количеству рёбер вдоль контура n-угольника в другую вершину, не перепрыгивая ни через одну другую фишку. Ход называется *допустимым*, если площадь треугольника, образованного фишками, после хода становится строго больше, чем до него. Игроки по очереди делают допустимые ходы; игрок, который не может сделать очередной допустимый ход, проигрывает. При каких n игрок, делающий первый ход, имеет выигрышную стратегию?

Задача 3. На доске записан конечный набор рациональных чисел. За одну *операцию* можно выбрать любые два числа a, b, стереть их и записать одно из чисел

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b \text{ (при } b\neq 0),\ b/a \text{ (при } a\neq 0).$$

Докажите, что для любого натурального $n>100$ есть лишь конечное количество целых $k\geqslant 0$, при которых можно, начав с набора чисел

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

получить за $n-1$ операций число $n!$.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время на работу: $4\frac{1}{2}$ часа.