

7. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 1: Петак, 27. фебруар 2015, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 1. Да ли постоји бесконачан низ природних бројева a_1, a_2, \dots такав да су a_m и a_n узајамно прости ако и само ако важи $|m - n| = 1$?

Задатак 2. За задат природан број $n \geq 5$, два играча играју следећу игру на правилном n -тоуглу. У почетном моменту уочена су три узастопна темена и на свако од њих је стављен по један жетон. Један потез одвија се тако што играч помера један жетон дуж произвољног броја страница и завршава у неком темену задатог n -тоугла, при чему у том процесу не сме прескочити ниједан од преостала два жетона. Потез је *легалан* уколико је површина троугла који образују жетони строго већа након одиграног потеза него што је била пре њега. Играчи наизменично повлаче легалне потезе, а ако играч не може повући легалан потез, он онда губи. За које вредности броја n играч који вуче први потез има победничку стратегију?

Задатак 3. На табли је записано неколико рационалних бројева. Једна *операција* састоји се у томе што одаберемо два броја a и b са табле, избришемо их, и напишемо на таблу један од бројева

$$a + b, a - b, b - a, a \times b, a/b \text{ (за } b \neq 0), b/a \text{ (за } a \neq 0).$$

Доказати да за сваки природан број $n > 100$ постоји само коначно много целих бројева $k \geq 0$ таквих да је, полазећи од бројева

$$k + 1, k + 2, \dots, k + n,$$

могуће, применом $n - 1$ операције, добити број $n!$.

Сваки задатак вреди 7 поенчића.

Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.