The 7^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Día 1: Viernes 27 de febrero del 2015, Bucarest

Language: Spanish

Problema 1. ¿Existe una sucesión infinita a_1, a_2, a_3, $\ldots$ de enteros positivos tal que a_m y a_n son coprimos si y solo si $|m-n|=1$?

Problema 2. Para un entero $n \geq 5$, dos personas juegan el siguiente juego en un n-ágono regular. Inicialmente, se escogen tres vértices consecutivos, y se ubica una ficha en cada uno. Un movimiento consiste en que una persona deslice una ficha a lo largo de cualquier número de lados hasta otro vértice del n-ágono sin saltar sobre otra ficha. Un movimiento es *legal* si el área del triángulo formado por las fichas es estrictamente mayor después del movimiento que antes. Las personas hacen movimientos legales por turnos, y si una persona no puede hacer un movimiento legal, esa persona pierde. ¿Para qué valores de n la persona que hace el primer movimiento tiene una estrategia ganadora?

Problema 3. Una lista finita de números racionales está escrita en un pizarrón. En una *operación*, elegimos cualesquiera dos números a, b, los borramos, y escribimos uno de los números

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b \text{ (si } b\neq 0),\ b/a \text{ (si } a\neq 0).$$

Demuestra que, para todo entero $n>100$, solo hay una cantidad finita de enteros $k\geq 0$, tales que, comenzando con la lista

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

es posible obtener, después de $n-1$ operaciones, el valor $n!$.

Cada uno de los tres problemas vale 7 puntos.
Tiempo permitido $4\frac{1}{2}$ horas.