The 7$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, February 27, 2015, Bucharest

Language: Ukrainian

Задача 1. Чи існує така нескінченна послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, що a_m та a_n взаємно прості тоді і тільки тоді, коли $|m-n|=1$?

Задача 2. Дано натуральне число $n \geq 5$. Два гравці грають в гру на правильному n-кутнику. Початково на трьох послідовних вершинах многокутника лежить по одній фішці. За хід гравець має обрати довільну фішку та пересунути на будь-яку кількість ребер вздовж границі в іншу вершину n-кутника, не перескочуючи через інші фішки. Хід називається *допустимим*, якщо площа трикутника, утвореного фішками, після ходу строго більша, ніж до нього. Гравці роблять допустимі ходи по черзі, і той, хто не може зробити допустимий хід, програє. Для яких значень n у гравця, що робить перший хід, є виграшна стратегія?

Задача 3. На дошці написано набір раціональних чисел. За одну *операцію* можна обрати два довільних числа a, b, стерти їх та записати одне з наступних чисел:

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b\ (\text{якщо } b\neq 0),\ b/a\ (\text{якщо } a\neq 0).$$

Доведіть, що для довільного натурального $n>100$, знайдеться тільки скінченна кількість натуральних чисел $k\geq 0$, таких що починаючи з набору

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

після $n-1$ операції можна отримати число $n!$.

Кожна з трьох задач оцінюється в 7 балів.

Час роботи $4\frac{1}{2}$ години.