The 7$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Ден 2: Събота, 28 февруари 2015, Букурещ

Language: Bulgarian

Задача 4. Нека ABC е триъгълник и D е точката, в която вписаната окръжност допира страната BC. Нека J_b и J_c са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците ABD и ACD. Докажете, че центърът на окръжността, описана около триъгълника AJ_bJ_c, лежи на ъглополовящата на $\angle BAC$.

Задача 5. Нека $p \geq 5$ е просто число. За всяко цяло положително k, нека $R(k)$ е остатъкът от делението на k на p, като $0 \leq R(k) \leq p-1$. Намерете всички цели положителни $a < p$, такива, че, за всяко $m = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Задача 6. За всяко цяло положително n, намерете най-голямото реално число μ, което отговаря на следното условие: за всяко множество C от $4n$ точки във вътрешността на единичния квадрат U съществува правоъгълник T, който се съдържа в U и е такъв, че:

- страните на T са успоредни на страните на U;
- вътрешността на T съдържа точно една точка от C;
- лицето на T е поне μ.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа $4\frac{1}{2}$ часа.