

## 第 7 届罗马尼亚大师杯数学邀请赛

第二天：2015 年 2 月 28 日星期六，布加勒斯特

Language: Chinese

4. 已知： $\triangle ABC$  中，点  $D$  为  $\triangle ABC$  内切圆在  $BC$  边上的切点，假设点  $J_b$  与点  $J_c$  分别为  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  的内心。求证： $\triangle AJ_b J_c$  的外心落在  $\angle BAC$  的角平分线上。
5. 设素数  $p \geq 5$ ，对于正整数  $k$ ，定义  $R(k)$  为  $k$  被  $p$  除后的余数，其中  $0 \leq R(k) \leq p-1$ 。试求所有正整数  $a < p$ ，使得对每一个  $m = 1, 2, \dots, p-1$ ，均有  $m + R(ma) > a$  成立。
6. 给定一个正整数  $n$ ，试求最大的实数  $\mu$ ，满足下述条件：对“开”单位正方形  $U$  内的任意一个由  $4n$  个点构成的集合  $C$ ，存在一个  $U$  内的“开”矩形  $T$ ，满足如下性质：
- (1)  $T$  的边均与  $U$  的边平行；
  - (2)  $T$  包含  $C$  中恰好一个点；
  - (3)  $T$  的面积至少是  $\mu$ 。
- (注：所谓“开”图形，是指不含该图形的边界)。

说明：每题 7 分，比赛时间为 4.5 小时。