The 7^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Jour 2: Samedi 28 février 2015, Bucarest

Language: French

Problème 4. Soit ABC un triangle, et soit D le point de contact entre le cercle inscrit et le côté $[BC]$. Soient J_b et J_c les centres des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle AJ_bJ_c est situé sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Problème 5. Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Pour tout entier strictement positif k, soit $R(k)$ le reste de la division de k par p, avec $0 \leq R(k) \leq p-1$. Déterminer tous les entiers strictement positifs $a < p$ tels que, pour tout $m = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problème 6. Étant donné un entier strictement positif n, déterminer le plus grand nombre réel μ satisfaisant la condition suivante : pour tout ensemble C de $4n$ points à l'intérieur d'un carré unité U, il existe un rectangle T contenu dans U tel que

- les côtés de T sont parallèles à ceux de U
- l'intérieur de T contient exactement un point de C
- l'aire de T est supérieure ou égale à μ.

Chaque problème est noté sur 7 points.
Durée de l'épreuve : 4 heures 30 minutes.