The 7$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Második nap: 2015. február 28. (szombat), Bukarest

Language: Hungarian

4. feladat Legyen ABC egy háromszög, és legyen D az a pont, ahol a beírt kör érinti a BC oldalt. Legyen J_b, illetve J_c az ABD, illetve az ACD háromszög beírt körének középpontja. Bizonyítsuk be, hogy az AJ_bJ_c háromszög körülírt körének középpontja a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjére esik.

5. feladat Legyen $p \geq 5$ prímszám. Egy k pozitív egész számra jelölje $R(k)$ a k-nak p-vel vett osztási maradékát, ahol $0 \leq R(k) \leq p-1$. Határozzuk meg az összes olyan $a < p$ pozitív egész számot, melyre minden $m = 1, 2, \ldots, p-1$ szám esetén teljesül, hogy

$$m + R(ma) > a.$$

6. feladat Adott n pozitív egész számhoz határozzuk meg a legnagyobb μ valós számot, amely kielégíti a következő feltételt: minden, az U egységnégyzet belsejébe eső, $4n$ pontból álló C halmazhoz található egy U által tartalmazott T téglalap, melyre

- T oldalai párhuzamosak U oldalaival,
- T belsejében pontosan egy C-beli pont található,
- T területe legalább μ.

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.
Munkaidő 4 és fél óra.