

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Secondo giorno: sabato 28 febbraio 2015, Bucharest

Language: Italian

Problema 4. Sia ABC un triangolo, e sia D il punto in cui la circonferenza inscritta tocca il lato BC . Siano poi J_b e J_c gli incentri dei triangoli ABD e ACD , rispettivamente.

Dimostrare che il circocentro del triangolo AJ_bJ_c giace sulla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

Problema 5. Sia $p \geq 5$ un numero primo. Per ogni intero positivo k , sia $R(k)$ il resto della divisione di k per p , dove $0 \leq R(k) \leq p - 1$.

Determinare tutti gli interi positivi $a < p$ tali che, per ogni $m = 1, 2, \dots, p - 1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problema 6. Dato un numero reale n , determinare il più grande numero reale μ con la seguente proprietà: per ogni insieme C di $4n$ punti nell'interno del quadrato unitario U , esiste un rettangolo T contenuto in U tale che

- i lati di T sono paralleli ai lati di U ;
- l'interno di T contiene esattamente un punto di C ;
- l'area di T è almeno pari a μ .

Ogni problema vale 7 punti.

Tempo: 4 ore e 30 minuti.