7. Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

Dzień 2: sobota, 28 lutego 2015 r., Bukareszt

Language: Polish

Problem 4. Niech ABC będzie trójkątem i niech D będzie punktem styczności okręgu wpisanego w ABC do boku BC. Niech J_b i J_c będą, odpowiednio, środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie AJ_bJ_c leży na dwusiecznej kąta $\angle BAC$.

Problem 5. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Dla dodatniej liczby całkowitej k niech $R(k)$ będzie resztą z dzielenia k przez p, gdzie $0 \leq R(k) \leq p-1$. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie $a < p$ takie, że dla każdego $m = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problem 6. Dla danej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz największą liczbę rzeczywistą μ, spełniającą następujący warunek: dla każdego zbioru C, składającego się z $4n$ punktów leżących we wnętrzu kwadratu jednostkowego U, istnieje taki prostokąt T zawarty w U, że

- boki T są równoległe do boków U;
- wnętrze T zawiera dokładnie jeden punkt z C;
- pole T wynosi co najmniej μ.

Każdy z trzech problemów wart jest 7 punktów.
Czas pisania: $4\frac{1}{2}$ godziny.