The 7$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 28 de Fevereiro de 2015, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 4. Seja ABC um triângulo e seja D o ponto onde o incírculo toca o lado BC. Sejam J_b e J_c os incentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente. Prove que o circuncentro do triângulo AJ_bJ_c está na bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$.

Problema 5. Seja $p \geq 5$ um número primo. Para um inteiro positivo k, seja $R(k)$ o resto quando k é dividido por p, com $0 \leq R(k) \leq p-1$. Determine todos inteiros positivos $a < p$ tais que, para todos $m = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problema 6. Dado um inteiro positivo n, determine o maior número real μ satisfazendo a seguinte condição: para todo conjunto C de $4n$ pontos no interior do quadrado unitário U, existe um retângulo T contido em U tal que

- os lados de T são paralelos aos lados de U;
- o interior de T contém exatamente um ponto de C;
- a área de T é pelo menos μ.

Cada um dos problemas vale 7 pontos.
Duração: 4 horas e 30 minutos.