

# The 7<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, February 28, 2015, Bucharest

Language: Russian

**Задача 4.** В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  — точка касания вписанной в него окружности со стороной  $BC$ . Пусть  $J_b$  и  $J_c$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ACD$  соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $AJ_bJ_c$ , лежит на биссектрисе угла  $BAC$ .

**Задача 5.** Пусть  $p \geq 5$  — простое число. Для натурального  $k$  обозначим через  $R(k)$  остаток от деления числа  $k$  на  $p$ , так что  $0 \leq R(k) \leq p - 1$ . Найдите все такие натуральные  $a < p$ , что при всех  $m = 1, 2, \dots, p - 1$  верно неравенство

$$m + R(ma) > a.$$

**Задача 6.** Дано натуральное число  $n$ . Найдите наибольшее вещественное число  $\mu$ , удовлетворяющее следующему условию: для любого множества  $S$ , состоящего из  $4n$  точек, лежащих строго внутри единичного квадрата  $U$ , найдётся прямоугольник  $T$ , содержащийся в  $U$  и такой, что

- стороны  $T$  параллельны сторонам  $U$ ;
- существует ровно одна точка множества  $S$ , лежащая строго внутри  $T$ ;
- площадь  $T$  не меньше  $\mu$ .

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время на работу:  $4\frac{1}{2}$  часа.