

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, February 28, 2015, Bucharest

Language: Russian

Задача 4. В треугольнике ABC точка D — точка касания вписанной в него окружности со стороной BC . Пусть J_b и J_c — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AJ_bJ_c , лежит на биссектрисе угла BAC .

Задача 5. Пусть $p \geq 5$ — простое число. Для натурального k обозначим через $R(k)$ остаток от деления числа k на p , так что $0 \leq R(k) \leq p - 1$. Найдите все такие натуральные $a < p$, что при всех $m = 1, 2, \dots, p - 1$ верно неравенство

$$m + R(ma) > a.$$

Задача 6. Дано натуральное число n . Найдите наибольшее вещественное число μ , удовлетворяющее следующему условию: для любого множества C , состоящего из $4n$ точек, лежащих строго внутри единичного квадрата U , найдётся прямоугольник T , содержащийся в U и такой, что

- стороны T параллельны сторонам U ;
- существует ровно одна точка множества C , лежащая строго внутри T ;
- площадь T не меньше μ .

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время на работу: $4\frac{1}{2}$ часа.