

7. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 2: Субота, 28. фебруар 2015, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 4. Нека је уочен $\triangle ABC$, и нека је D тачка додира његове уписане кружнице и странице BC . Нека су J_b и J_c центри кружница уписаних у $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, редом. Доказати да центар кружнице описане око $\triangle AJ_b J_c$ лежи на симетрали $\angle BAC$.

Задатак 5. Нека је $p \geq 5$ прост број. За природан број k , означимо са $R(k)$ остатак при дељењу броја k бројем p ; важи неједнакост $0 \leq R(k) \leq p - 1$. Одредити све природне бројеве $a < p$ такве да за свако $m = 1, 2, \dots, p - 1$ важи

$$m + R(ma) > a.$$

Задатак 6. За задат природан број n , одредити највећи реалан број μ такав да, за сваки скуп C сачињен од $4n$ тачака из унутрашњости јединичног квадрата U , постоји правоугаоник T садржан у U при чему важи:

- странице правоугаоника T су паралелне страницама квадрата U ;
- у унутрашњости правоугаоника T налази се тачно једна тачка из скупа C ;
- површина правоугаоника T износи најмање μ .

Сваки задатак вреди 7 поенчића.

Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.