

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Día 2: Sábado 28 de febrero de 2015, Bucarest

Language: Spanish

Problema 4. Sea ABC un triángulo, y sea D el punto donde la circunferencia inscrita intersecta al lado BC . Sean J_b y J_c los incentros de los triángulos ABD y ACD , respectivamente. Demuestra que el circuncentro del triángulo AJ_bJ_c está en la bisectriz de $\angle BAC$.

Problema 5. Sea $p \geq 5$ un número primo. Para un entero positivo k , sea $R(k)$ el residuo de k cuando es dividido entre p , con $0 \leq R(k) \leq p - 1$. Determina todos los enteros positivos $a < p$ tales que, para todo $m = 1, 2, \dots, p - 1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problema 6. Dado un entero positivo n , determina el mayor número real μ que satisface la siguiente condición: para todo conjunto C de $4n$ puntos en el interior del cuadrado unitario U , existe un rectángulo T contenido en U tal que

- los lados de T son paralelos a los lados de U ;
- el interior de T contiene exactamente un punto de C ;
- el área de T es al menos μ .

Cada uno de los tres problemas vale 7 puntos.

Tiempo permitido $4\frac{1}{2}$ horas.