

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, February 28, 2015, Bucharest

Language: Ukrainian

Задача 4. Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторони BC у точці D . Нехай J_b та J_c — центри вписаних кіл трикутників ABD та ACD відповідно. Доведіть, що центр описаного кола трикутника AJ_bJ_c лежить на бісектрисі кута $\angle BAC$.

Задача 5. Нехай $p \geq 5$ — просте число. Для натурального числа k позначимо через $R(k)$ залишок при діленні числа k на p , причому $0 \leq R(k) \leq p - 1$. Знайдіть всі такі натуральні числа $a < p$, що при всіх $m = 1, 2, \dots, p - 1$ виконується нерівність

$$m + R(ma) > a.$$

Задача 6. Дано натуральне число n . Знайдіть найбільше дійсне число μ , що задовольняє наступну умову: для будь-якої множини S , що складається з $4n$ точок, які лежать строго всередині одиничного квадрата U , знайдеться прямокутник T , що лежить в U , та такий, що

- сторони T паралельні сторонам U ;
- існує рівно одна точка множини S , що лежить строго всередині T
- площа T не менша μ .

Кожна з трьох задач оцінюється в 7 балів.

Час роботи $4\frac{1}{2}$ години.